

Lycée :02/03/1934	Devoir synthèse n°1 (2019-2020)	Classe :4SC
Hedi Ben Hassen	Mathématiques	Durée : 2heures

### Exercice1 (5pts)

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - 7e^{i\frac{\pi}{3}}z + 10e^{i\frac{2\pi}{3}} = 0$  les nombres complexes

$$h = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } b = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$$

1) a) Montrer que h est une solution de (E). En déduire l'autre solution .

b) Déterminer les racines carrées de h et b

2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^4 - 7e^{i\frac{\pi}{3}}z^2 + 10e^{i\frac{2\pi}{3}} = 0$

3) On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  les points B,

C et D d'affixes respectives :  $z_B = b$   $z_C = be^{i\frac{2\pi}{3}}$  et  $z_D = be^{i\frac{-2\pi}{3}}$ .

a) Calculer  $z_C^3$  et  $z_D^3$

b) En déduire que le triangle BCD est équilatéral.

### Exercice2 (5pts)

On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  les points A et B

d'affixes respectives  $p = 2i$  et  $q = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

1) Soit (E) l'équation dans  $\mathbb{C}$  tel que (E) :  $2z^2 + 2qz + p + 2 = 0$

a) Ecrire p et q sous forme exponentielle

b) Vérifier que  $q^2 = 2p$

c) Résoudre dans l'équation (E)

2) Soit C le point d'affixe  $c = q - p$ .

a) Montrer que OABC est un parallélogramme.

b) Construire les points A, B et C .

3) a) Montrer que  $c = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(1 - e^{i\frac{\pi}{4}})$

b) En déduire la forme exponentielle de c.

### Exercice (6pts)

Soit f la fonction définie sur  $[2, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$ . On désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé

1) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$   $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{x-2} = +\infty$ . Interpréter les résultats graphiquement

b) Montrer que f est dérivable sur  $]2, +\infty[$  et que  $f'(x) = \frac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}}$

c) Montrer que f est une bijection de  $[2, +\infty[$  sur  $[0;1[$

2) On note  $f^{-1}$  la fonction réciproque de f et (C') sa représentation graphique.

a) Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $[0;1[$ .

b) Vérifier que le point  $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, 4) \in (C')$

c) Soit T la tangente à (C') au point A. Montrer que T a pour équation  $y=8\sqrt{3}x-8$  et passe par  $B(\frac{1}{\sqrt{3}},0)$

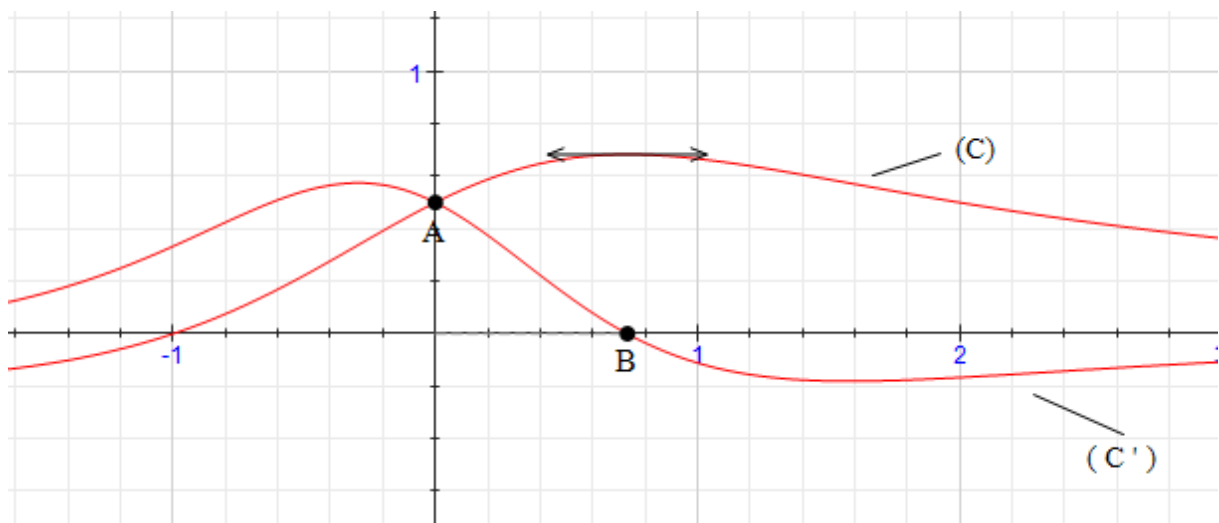
3) Dans l'annexe ci-jointe (C) la courbe représentative de f, la droite D :  $y=x$  et le point B. Tracer (C') et T.

Exercice 4 (4pts)

Dans la figure ci-dessous (C) et (C') les représentations graphiques d'une fonction f dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa fonction dérivée tel que ;  $f(\sqrt{3}-1) < \sqrt{3}-1$ .

- (C) et (C') passent par le point  $A(0, \frac{1}{2})$ .

- (C') coupe l'axe des abscisses au point B d'abscisse  $\sqrt{3}-1$ .



1) Justifier que (C) et (C') sont les courbes respectives de f et f'.

2)a) Dresser le tableau de variation de f' sur  $[0, \sqrt{3}-1]$

b) En déduire que pour tout  $x \in [0, \sqrt{3}-1]$  on a :  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3)a) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[0, \sqrt{3}-1]$

b) Montrer que pour tout  $x \in [0, \sqrt{3}-1]$  on a  $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Annexe

Nom et Prénom : .....

